Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

A ANÁLISE DA VOLATILIDADE DO ÍNDICE PSI-20 BASEADA EM MODELOS ARCH E GARCH*

Elisabete Mendes Duarte
Dep.de Gestão e Economia. Escola Superior de Tecnologia e Gestão - Instituto Politécnico de Leiria

José Alberto Soares da Fonseca
Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

Resumo

A volatilidade desempenha um papel importante na avaliação dos activos financeiros, daí que proliferem na literatura estudos com vista à sua especificação e medida.

Existem várias técnicas para a estimação da volatilidade sendo, a volatilidade determinística uma das mais utilizadas. Este tipo de estimação admite que a volatilidade apresenta uma dependência temporal de variáveis conhecidas no mercado.

O presente artigo testa a hipótese de existência de volatilidade determinística no índice PSI-20. Para esse fim recorre-se a modelos da família ARCH e GARCH, que elevado número de estudos revelam ser bastante adequados à análise das séries de preços de activos financeiros.

Palavras Chave: Avaliação de Opções, Modelos ARCH e GARCH.

INTRODUÇÃO

A avaliação das opções é uma temática em torno da qual existe variada investigação. A actualidade deste tema prende-se com o facto de que este tipo de activos têm tido cada vez maior difusão junto dos investidores e, paralelamente, o facto da teoria de avaliação das opções ter um vasto conjunto de aplicações, particularmente úteis em vários domínios da gestão.

* Este artigo foi aceite para publicação na edição especial da *Estudos de Gestão - Portuguese Journal of Management Studies*, em resultado de ter sido eleito após aplicação de critério de selecção que passou por considerá-lo como um dos mais relevantes artigos da sua área de entre os que foram apresentados nas XII Jornadas de Gestão Científica, na Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal. Por conseguinte, não passou o nosso processo regular de "double blind refereeing" como sucede com os números correntes da revista.

O modelo de Black-Scholes (1973) foi o impulso decisivo para o desenvolvimento da teoria de avaliação das opções. Um número significativo de autores desenvolveu modelos aplicados a essa teoria. Muitas vezes esses trabalhos surgiram, não como um objectivo em si, mas sim como um subproduto de uma investigação levada a cabo numa área afim. Algumas das fórmulas obtidas, embora permitam resultados mais próximos da realidade, acabaram por nunca conquistar a popularidade da fórmula original. As razões do seu êxito prendem-se com o facto de utilizar parâmetros que, na sua generalidade, são observáveis (a excepção é a volatilidade) e de permitir a utilização de uma forma fechada para a obtenção dos preços das opções. Para os investidores esta fórmula tem dois atributos bastante atraentes: a facilidade de utilização e a rapidez com que os resultados são obtidos. Assim, apesar da diversidade de modelos existentes nesta área, o modelo de Black-Scholes é, ainda hoje, uma referência para qualquer analista ou teórico que trabalhe com os mercados de derivados.

A fórmula de Black-Scholes assenta, contudo, num conjunto de hipóteses muito restritivas, necessárias para que a mesma tenha validade. Estas acabam por gerar diversas limitações que se prendem com as hipóteses de comportamento das opções, do activo subjacente e do próprio mercado de capitais. Um dos problemas mais difíceis de contornar prende-se com o facto de se admitir que a volatilidade do activo é constante. Normalmente a volatilidade não é constante, pelo que surge o problema de determinar os valores que vai tomando ao longo do período em estudo. A importância dada ao cálculo da volatilidade resulta do papel central que ocupa no cálculo do valor das opções e não só. Efectivamente, enquanto medida da variação do preço de um activo em torno da média, para um intervalo fixo de tempo, a volatilidade é, por si só, um elemento fundamental para a gestão do risco nos mercados financeiros.

Quando se estudam sistematicamente as características das séries temporais dos activos financeiros encontram-se factores comuns que estão na origem de vários modelos estatísticos desenvolvidos para levar a cabo a estimação da volatilidade. Dada a importância do papel desempenhado por esta, é muito vasta a literatura que se dedica à sua especificação e medida. Podemos, no entanto, subdividir em quatro grupos as principais técnicas de estimação da volatilidade: a volatilidade histórica, a volatilidade implícita, a volatilidade determinística e a volatilidade estocástica.

A forma mais simples de estimação da volatilidade é através da utilização da volatilidade histórica. Este método de estimação, na sua formulação mais simples, consiste em calcular o desvio padrão da rendibilidade instantânea dos activos financeiros, durante um período anterior àquele para o qual se pretende prever a volatilidade. Por norma, no cálculo da volatilidade utiliza-se um período histórico imediatamente anterior e com uma duração similar ao período de vigência da opção que estamos a analisar. Esta é, não obstante, uma norma que é utilizada na

prática mas sem qualquer suporte científico. Em relação a este tipo de estimação a objecção básica à sua utilização é a de que a volatilidade relevante é sempre a futura e não a passada e que as duas dificilmente se poderão igualar[1].

A volatilidade implícita é o valor da volatilidade dado pelo modelo de Black-Scholes que iguala o preço teórico da opção ao seu preço efectivo no mercado. Tendo em conta que este modelo de determinação do valor das opções é usualmente utilizado no mercado em estudo, então o valor obtido corresponderá à expectativa que os investidores têm para a volatilidade que irá vigorar durante o período de vigência da opção. Os primeiros estudos empíricos sobre a volatilidade implícita, dos quais referiria a título de exemplo o de Schmalensee e Trippi (1978), foram bastante optimistas. Efectivamente, nele foi constatado que a volatilidade implícita é, à partida, um melhor previsor da volatilidade futura do que as estimativas feitas em torno do desvio padrão das rendibilidades passadas.

A questão que aqui surge deriva do facto de que, se considerarmos satisfeitas todas as condições do modelo, deveria encontrar-se uma única volatilidade para as opções de cada prazo. Ora são diversos os estudos empíricos que comprovam exactamente o contrário, o que é inconsistente com o modelo de Black-Sholes. Efectivamente, está empiricamente comprovado que a volatilidade implícita é alta para opções *out-of-the-money* e *in-the-money* e baixa para opções *at-the-money*. Esta relação, entre a volatilidade e os diferentes preços de exercício, apresenta uma configuração em U que é vulgarmente conhecida como o efeito sorriso da volatilidade. A existência deste efeito leva a que, os valores da volatilidade implícita estejam sistematicamente correlacionados com os preços de exercício. Este efeito constitui a prova mais formal de que não se deverá assumir a volatilidade constante tal como faz o modelo de Black-Sholes. Comprova-se assim, que o modelo de Black-Sholes não permite a obtenção de uma medida robusta da volatilidade.

Nas séries temporais dos rendimentos dos activos financeiros é comum que a variações grandes se sucedam outras, embora por vezes, essas variações, possam não se dar na mesma direcção. Estatisticamente, tal significa a presença de uma elevada autocorrelação no quadrado desses rendimentos, logo a variância tem uma dependência temporal. É esta dependência que se tenta captar através da volatilidade determinística.

Assumir que a volatilidade é determinística é o mesmo que admitir que as variações na volatilidade são explicadas por variáveis conhecidas, normalmente as rentabilidades históricas e até mesmo observações passadas da volatilidade. Existem vários modelos de estimação da volatilidade determinística, de entre os quais se destacam os modelos da família ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedasticity*). Estes modelos têm demonstrado que conseguem explicar algumas propriedades

[1] O próprio Fischer Black já afirmava em 1976 que a hipotese de tomar a volatilidade histórica como uma boa medida da volatilidade futura era pouco razoável

estatísticas importantes das séries temporais e ainda que têm grandes vantagens, sob o ponto de vista prático, no domínio da previsão. O somatório de todos estes pontos leva a que os modelos ARCH assumam uma importância vital, sob o ponto de vista do cálculo da volatilidade presente nos mercados financeiros.

Os modelos de avaliação das opções com volatilidade estocástica surgiram a partir de 1987, tendo no entanto, aumentado muito a literatura sobre o tema nos últimos anos. Uma das razões desse facto prende-se com a constatação de que as distribuições dos rendimentos proporcionados pelo activo subjacente têm caudas mais pesadas do que as pressupostas pela distribuição normal. Tal significa que a frequência de valores extremos é muito elevada, logo não pode ser descrita com exactidão pela distribuição normal. A ocorrência de caudas pesadas estaria em sintonia com o facto de se constatar que através do modelo de Black-Scholes se estaria a subavaliar as opções de venda *out-of-the-money*. Esta situação, no entanto, é compatível com os modelos ARCH ou ainda com modelos com saltos no rendimento dos activos, tal como foi descrito por Merton (1976). Assim, os modelos de volatilidade estocástica assumem, adicionalmente, que esta não pode ser prevista com base em informação passada ou presente fornecida pelos mercados financeiros. Consideram, então, que a entidade geradora da volatilidade tem uma natureza diferente, embora eventualmente correlacionada, com o processo gerador dos preços dos activos. Esta constitui mais uma distinção básica em relação aos processos ARCH, onde se considera que o processo gerador da aleatoriedade é o mesmo para a volatilidade e para os preços dos activos financeiros.

Quer para os investigadores académicos quer para os investidores presentes no mercado, não existe consenso acerca da melhor especificação para a volatilidade. As preferências vão, oscilando entre a volatilidade determinística (especialmente através da utilização dos modelos ARCH) e a estocástica, sendo também muito utilizada a volatilidade implícita. Apesar de frequentemente se verificar que as hipóteses subjacentes ao modelo de Black-Scholes são violadas pelo normal funcionamento do mercado, o que leva à conclusão prévia de que a volatilidade implícita, em face da sua origem, não será um bom previsor da volatilidade futura, os analistas utilizam-na como uma fonte de informação vinda do mercado. Efectivamente os operadores de mercado utilizam mais a fórmula de Black-Scholes para os cálculos da volatilidade necessários para as sua análises, do que como ferramenta para a avaliação das opções, efeito para o qual foi originalmente concebida. A grande maioria dos modelos, quer de volatilidade determinística, quer de volatilidade estocástica permitem a obtenção de preços para as opções que conseguem captar o efeito sorriso da volatilidade não enfermando, pois, do mesmo defeito da volatilidade implícita. A ênfase do presente estudo recai, no entanto, sobre a volatilidade determinística e a sua aplicação ao mercado financeiro português.

1. VOLATILIDADE DETERMINÍSTICA

O modelo ARCH de Engle (1982) é, dentro da família destes modelos de volatilidade determinística, o mais genérico. No caso da volatilidade, o termo auto-regressivo serve para a referência à sua persistência e o termo hetero-cedasticidade condicional serve para descrever a dependência da volatilidade em relação ao seu nível histórico. Diz-se, por isso, que nestes modelos existe uma "parametrização estocástica e endógena da heterocedasticidade" Nicolau (1999). Aqui a volatilidade é expressa através das observações desfasadas dos valores assumidos pelo quadrado das rendibilidades. Ou seja:

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t + v_t \tag{2}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{Q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \tag{3}$$

$$\text{com } \sigma_t^2 = E\left[\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}^2\right] \tag{4}$$

Onde y_t representa a rentabilidade instantânea do activo, x_t é o vector de variáveis explicativas exógenas ou pertencendo ao conjunto de informação $\{y_{t-1}\}$, β é um vector de parâmetros fixos, v_t é uma perturbação alietória tal que $\text{cov}(\sigma_t, v_t) = 0$ com uma distribuição normal standartizada e Q é a ordem do termo autoregressivo. Para que a volatilidade seja não negativa assume-se que $\omega \rangle 0$ e que $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1,2,...,Q$.

Este modelo é resolúvel pela técnica de decomposição de erros que consiste em construir uma função de máxima verosimilhança, através da qual se extraem valores para os parâmetros.

O artigo de Engle constituiu um marco fundamental desta teoria porque, desde cedo se considerou que a probabilidade da distribuição da rentabilidade dos activos financeiros ser normal era muito baixa. Constata-se que, em geral, estas distribuições são leptocúrticas. A dificuldade de tratamento deste tipo de distribuições dificultou, durante algum tempo, o avanço da teoria, e Engle propôs uma explicação que permite o tratamento do problema. Este autor considera que o facto da distribuição ser leptocúrtica se deve a que a volatilidade tem uma distribuição condicionada, muito provavelmente normal, onde a própria variância se altera ao longo do tempo. A partir desta explicação prova-se que a passagem de uma distribuição condicionada que pode ser considerada como normal de média zero e variância σ_t^2 para uma distribuição não condicionada leva à obtenção de uma distribuição leptocúrtica. Tal facto justifica-se porque a junção de duas distribuições normais com valor médio igual e variâncias diferentes leva à obtenção

de uma distribuição com caudas pesadas, isto é, à obtenção de uma distribuição onde a probabilidade de ocorrência de valores extremos é maior do que numa distribuição normal[2].

No entanto, em casos como o da volatilidade, a persistência é, em geral, muito grande, o que significa trabalhar com modelos auto-regressivos de ordem muito elevada, ou seja, onde parâmetro Q é muito elevado. Para o evitar trabalha-se, não com o ARCH, mas sim com o GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*) desenvolvido por Bollerslev (1986). Este último, para além das rentabilidades históricas do activo, utiliza observações passadas da própria volatilidade, contribuindo decisivamente para baixar a ordem dos modelos autoregressivos. Consegue-se, desta forma, expressar a dependência temporal da volatilidade com um menor número de parâmetros. Num modelo GARCH assume-se que uma única fonte de incerteza conduz simultaneamente o preço do activo subjacente e a própria volatilidade. Tendo sido testado empiricamente por vários autores, este modelo tem demonstrado boa capacidade para captar o processo seguido pela volatilidade dos rendimentos dos activos. No modelo GARCH (P,Q) a variância condicional toma um aspecto diferente do modelo anterior que pode ser representado da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{Q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{P} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (5)$$

Nesta equação é introduzido um conjunto de termos que representam os elementos autoregressivos da própria volatilidade. Assume-se agora que $\omega \rangle 0$, $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1,2,...,Q$, $\beta_j \geq 0, \forall j = 1,2,...,P$ e que $\sum_{i=1}^{Q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{P} \beta_j \langle 1$. Neste caso se P=0 o modelo reduz-se a um ARCH(Q). No caso em que $\sum_{i=1}^{Q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{P} \beta_j = 1$ admite-se uma elevada persistência a choques na volatilidade, pelo que passamos a ter um IGARCH (Integrated GARCH)[3]. Nestas condições, a variância condicional não existe, o que significa que a série da rentabilidade e do quadrado da rendibilidade do activo em análise segue um processo que não é estacionário na covariância.

Na estimação dos modelos ARCH utiliza-se, usualmente, o método da máxima verosimilhança sob a hipótese de que a taxa de rendibilidade segue uma distribuição normal. No entanto, o mesmo tipo de estimação pode ser aplicado admitindo que

[2] Veja-se a este propósito Nicolau (1999).

[3] Note-se que é usual encontrar valores de persistência a choques na volatilidade muito elevados quando se faz a utilização de observações com frequência muito elevada.

a distribuição da rendibilidade se faz de acordo com uma *t-Student*. Neste último caso toma o nome de GARCH-t[4].

Outro modelo ARCH muito conhecido e com uma ampla utilização é o modelo EGARCH (*Exponential GARCH*) desenvolvido por Nelson (1991). Este modelo tem a vantagem, em relação aos anteriores, de capturar os efeitos assimétricos das subidas e descidas da rentabilidade nos mercados financeiros[5]. No modelo EGARCH(P,Q) a variância condicional toma a seguinte forma:

$$\ln\left(\sigma_t^2\right) = w + \sum_{i=1}^{Q} \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}^2} + \sum_{i=1}^{Q} \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}^2} \right| + \sum_{j=1}^{P} \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 \qquad (6)$$

Neste modelo, ao introduzirmos simultaneamente ε_{t-i} e o respectivo valor absoluto consegue-se capturar alguma da assimetria entre o rendimento do activo e a respectiva volatilidade condicional. O efeito assimetria, resultante da não estacionaridade da média, é medida, neste modelo, pelo coeficiente γ_i.

Duan (1995) desenvolve um modelo de avaliação das opções cuja volatilidade segue um processo GARCH. Neste modelo é utilizado um método de cálculo muito intensivo para simular os rendimentos, e a volatilidade obtidos sob uma distribuição risco-neutral[6], permitindo obter, assim, os preços das opções[7]. Este modelo consegue ir mais além do que o modelo de Black-Scholes permitindo, por exemplo, captar o efeito sorriso da volatilidade. Aqui, o preço da opção, além de contemplar as mesmas variáveis que o modelo de Black-Scholes, contempla ainda as variáveis que descrevem a variação temporal da volatilidade e a variável que representa o excesso de rendimento acima do activo sem risco. Tal significa que este novo

---

[4] Se se prescindir da especificação da função de distribuição da taxa de rendibilidade, terá de se empregar o método da quasi-máxima verosimilhança para a estimação do modelo.

[5] Se considerarmos que é usual, nestes mercados, que as diminuições bruscas das cotações contribuam mais para a volatilidade dos que os aumentos bruscos das cotações, a captação deste efeito assimétrico torna-se particularmente importante. Este efeito é conhecido internacionalmente pelo *Leverage Effect*.

[6] A aproximação risco-neutral foi originalmente desenvolvida por Cox e Ross (1976) tendo sido estudada com maior profundidade por Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981). Originalmente baseou-se na constatação de que, tal como foi apresentada, a fórmula de Black-Scholes não dependia de quaisquer factores que reflectissem as preferências dos investidores face ao risco. Ou seja, o preço da opção não estava relacionado com a maior ou menor aversão ao risco por parte dos investidores.
Nesta aproximação sugere-se um tipo de preferência risco-neutral. Tal significa que um investidor risco-neutral apenas se importa com a riqueza média associada a um activo com risco e não atribui importância ao seu nível de risco. Se todos os investidores tiverem este tipo de comportamento, então em equilíbrio, todos os activos proporcionariam um nível de rendimento igual a taxa de juro sem risco. Se tal não acontecesse os investidores tenderiam a comprar todos os activos com rendibilidade superior ao activo sem risco e vice-versa, restaurando assim o equilíbrio. Consequentemente, sob a hipotese de um comportamento risco-neutral o caminho da rendibilidade dos activos, no tempo, tem de ser ajustado por forma a que a rendibilidade do activo com risco seja igual á taxa de juro sem risco.
Abken (1995), Abken, Madan e Ramamurtie (1996) e Aït-Sahalia e Lo (1995) demostraram empiricamente que a distribuição risco-neutral pode ser directamente inferida dos preços das opções transaccionadas no mercado.

[7] Amin e Ng já tinham feito uma primeira tentativa, não tão bem sucedida, em 1993.

modelo não é independente das preferências dos investidores. Duan demonstra que, sob uma distribuição risco-neutral, existe uma correlação negativa entre a variância GARCH e os rendimentos históricos do activo, se o prémio de risco deste último for positivo. Esta relação pode levar a uma assimetria negativa na distribuição neutra ao risco, o que é, em geral, uma característica dos dados empíricos conforme prova Bates (1995). De tudo isto resulta a obtenção de preços para as opções consistentes com o enviesamento que é observado na volatilidade.

Dado que a avaliação das opções cujos activos subjacentes seguem um processo GARCH, através do modelo supra citado, é muito morosa, complexa e com cálculos matemáticos muito intensivos, a maioria de autores faz o cálculo da volatilidade através do modelo GARCH e aplica o resultado directamente na fórmula de Black-Scholes. Este tipo de aplicação não é teoricamente correcto, embora vários estudos apontem para uma grande aproximação à realidade. Estudos levados a cabo por Engle, Kane e Noh (1994) concluem que, não obstante a fórmula de Black-Scholes não funcionar se a volatilidade seguir um processo GARCH, ao comparar a utilização dessa fórmula com a volatilidade implícita e com a volatilidade GARCH para o índice S&P 500, provam que os resultados da segunda alternativa são substancialmente melhores.

2. A VOLATILIDADE DO ÍNDICE PSI20

A série temporal utilizada neste estudo é o índice PSI-20, o principal índice accionista da bolsa portuguesa, com os dados obtidos desde o início da sua publicação, 02/Jan/1993 até ao final de Setembro de 2001. Foram utilizados os dados de fecho diários o que totaliza 2166 observações e a rentabilidade do índice foi calculada através da seguinte fórmula:

$$y_t = \ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)$$

Onde I_t representa o índice PSI-20 no momento t.

A análise dos gráficos 1 e 2 permite detectar níveis alternados de alta e baixa volatilidade. Uma análise mais pormenorizada permite mesmo a identificação dos seguintes períodos:

- 04.01.93 a 24.08.94 – período de volatilidade média;
- 25.08.94 a 31.12.96 – período de volatilidade baixa;
- 02.01.97 a 10.04.00 – período de volatilidade e rentabilidade elevadas
- 11.04.00 a 30.09.01 – período de elevada volatilidade e baixa rentabilidade.

GRÁFICO 1

Índice PSI20 - dados de fecho diários

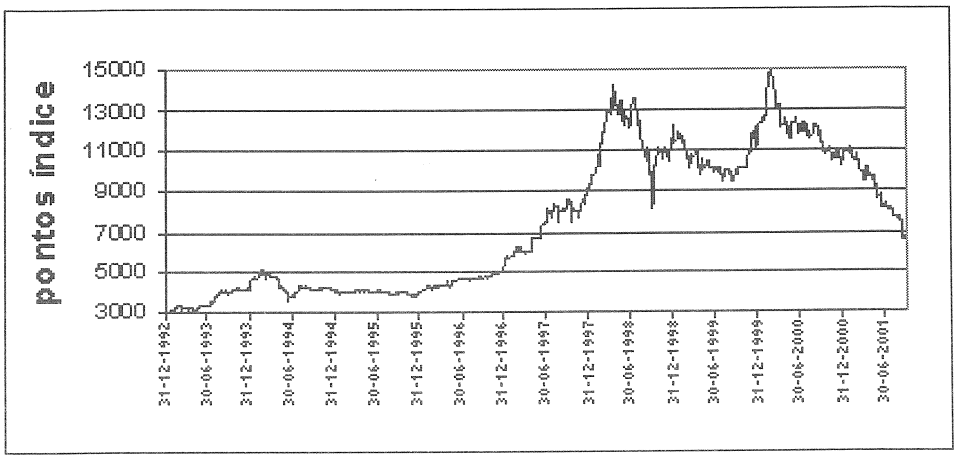
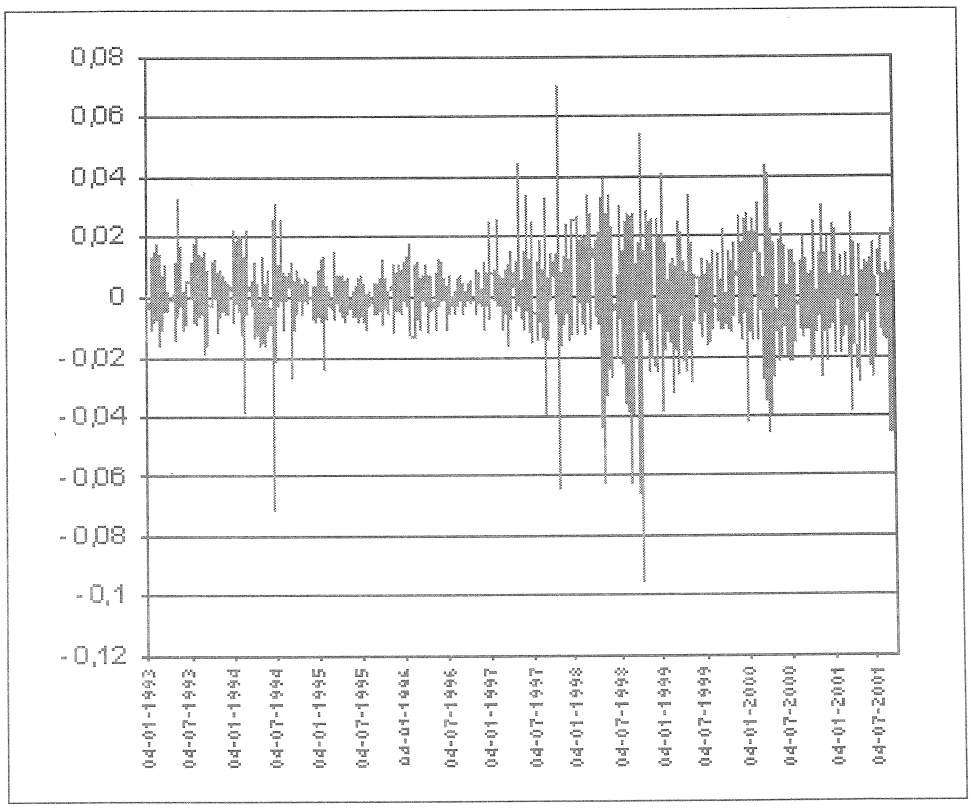


GRÁFICO 2

Rendibilidade do índice PSI20



Atente-se no seguinte quadro:

QUADRO 1

Indicadores estatísticos para os diferentes períodos de volatilidade

	Valor Médio	Rendib. Média(%)	Variância Diária	Volatilidade Anual (%)
04.01.93 - 24.08.94	3 935,16	0,09	0,80993432	14,269002
25.08.94 - 31.12.96	4 282,26	0,03	0,220192597	7,442638281
02.01.97 - 10.04.00	10 052,56	0,12	2,024804998	22,57483654
11.04.00 - 30.09.01	10 347,91	- 0,16	1,024191646	19,05778978
04.01.93 - 30.09.01	7 401,92	0,04	1,149141105	17,54927553

O período de 04.01.93 a 24.08.94 apresenta uma volatilidade média apesar de não haver subidas nem descidas muito pronunciadas no índice. Note-se que neste período ainda se viviam em Portugal os reflexos de uma grave crise internacional e em que a nossa bolsa sofria de alguma falta de confiança por parte dos investidores. O período de 25.08.94 a 31.12.96 é um período de relativa acalmia para a bolsa portuguesa, durante o qual não existe uma volatilidade significativa. Basicamente, este é um período em que se começa a tentar relançar a bolsa portuguesa, restabelecer a confiança dos investidores e se dá início ao processo de atracção dos investidores, nomeadamente através da criação de legislação mais adequada. O período de 02.01.97 a 10.04.00 é sem dúvida, dentro do lapso de tempo considerado, o período áureo da nossa bolsa, onde elevadas rentabilidades surgem associadas a elevadas volatilidades. Este período apresenta elevadas rentabilidades devido à crescente procura do mercado bolsista português por parte dos investidores, o que é fruto de diversos factores dos quais se destacam os incentivos fiscais e as excelentes rendibilidades proporcionadas pelas sucessivas privatizações de empresas estatais. O último período surge também com elevadas volatilidades, só que agora associadas a uma quebra na rentabilidade. Trata-se de um período conturbado para as bolsas em geral, e no caso português, agravado pelo esgotamento das privatizações. Repare-se que o nível de volatilidade é muito similar ao do período anterior e no entanto se observarmos o quadro 2 concluímos que o segundo período, aqui considerado, apresenta uma menor amplitude entre os valores máximo e mínimo do índice apesar de apresentar igualmente um nível alto de volatilidade.

Esta constatação poderá significar que os elevados índices de volatilidade, embora surjam indistintamente em períodos de subida e descida das cotações, são normalmente mais elevados quando as cotações estão em queda, ou seja, têm *leverage effect*. De toda esta análise pode concluir-se que o índice PSI-20 apresenta *clusters* de volatilidade, e possivelmente, *leverage effect*, dois dos factos usualmente associados a este tipo de series financeiras.

QUADRO 2

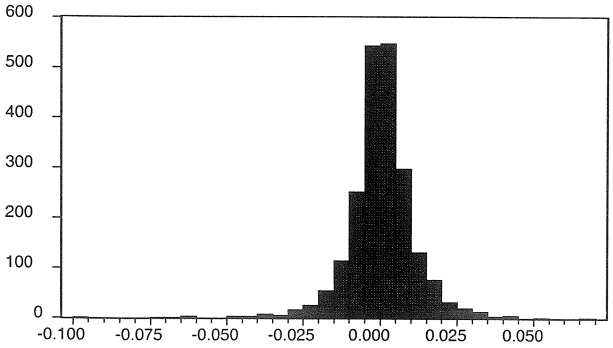
Amplitude de variação do índice PSI20

	02.01.97 - 10.04.00	11.04.00 - 30.09.01
Máximo	14822,59	12597,69
Mínimo	5152,34	6488,01
Diferença Apurada	9670,25	6109,68

Uma análise mais atenta às estatísticas descritivas da rendibilidade do PSI-20, apresentadas no quadro 3, permite observar que a série temporal da rendibilidade do PSI-20 é assimétrica negativa e apresenta valores elevados de curtose (leptocúrtica) sugestivos de que esta série apresenta uma distribuição diferente da normal, nomeadamente apresentando caudas mais pesadas.

GRÁFICO 3

Histograma da rendibilidade do PSI-20



QUADRO 3

Estatísticas descritivas da rendibilidade do PSI-20

Series: RENDIBILIDADE
Sample 1/04/1993 9/28/2001
Observations 2166

Mean	0.000412
Median	0.000376
Maximum	0.069413
Minimum	-0.095898
Std. Dev.	0.011058
Skewness	-0.682227
Kurtosis	10.76585
Jarque-Bera	5610.850
Probability	0.000000

Esta ideia é confirmada com o teste *Jarque-Bera*, um teste estatístico cujo objectivo é o de verificar se uma série é normalmente distribuída. Este teste mede a diferença entre a assimetria e a curtose da série comparando-os com os da distribuição normal. A análise do histograma da variável permite confirmar todas estas conclusões.

Dada a dificuldade em descrever, de forma completa, o processo estocástico subjacente a uma série temporal, é corrente recorrer-se à análise da função de autocorrelação. Neste caso em particular providencia um descrição do padrão de dependência temporal, particularmente importante para a modelação da variável cujo processo estocástico estamos a estudar.

A existência de uma elevada autocorrelação do quadrado da rendibilidade, é um facto esperado à partida. Significa que a elevados valores da série se seguem,

normalmente, valores igualmente elevados. Esta constatação é a primeira indicação de que o processo estocástico seguido pela série poderá ser bem explicado com o recurso a modelos da família ARCH.

Toda a análise levada a cabo ao longo do ponto 2 permite evidenciar a estrutura não linear da série. Conclui-se que se trata de uma série cuja distribuição não condicionada é levemente assimétrica e leptocúrtica. Tal com atrás ficou descrito este tipo de distribuição poderá estar associado a uma distribuição condicionada (que poderá ser normal) mas onde a variância se altera ao longo do tempo. Testar esta última hipotese é, no seu essencial, testar a hipotese da volatilidade do índice PSI-20 seguir um processo ARCH.

QUADRO 4

Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da rendibilidade e do quadrado da rendibilidade

Ordem	Rendibilidade				Quadrado da rendibilidade			
	FAC	FPAC	Q-Stat	P-value	FAC	FPAC	Q-Stat	P-value
1	0.181	0.181	70.724	0.000	0.233	0.233	118.11	0.000
2	0.042	0.009	74.507	0.000	0.115	0.064	146.73	0.000
3	0.018	0.009	75.219	0.000	0.147	0.113	193.50	0.000
4	0.051	0.047	80.849	0.000	0.102	0.04	216.32	0.000
5	0.002	-0.016	80.859	0.000	0.061	0.013	224.43	0.000
10	0.040	0.039	89.986	0.000	0.077	-0.013	436.89	0.000
15	0.056	0.036	105.72	0.000	0.090	0.034	489.14	0.000
20	0.029	0.034	116.39	0.000	0.031	-0.016	539.34	0.000

3. MODELAÇÃO DA VOLATILIDADE DETERMINÍSTICA NO ÍNDICE PSI-20

A primeira tentativa de modelação da volatilidade determinística com recurso aos modelos ARCH passa pela estimação dos modelos:

$$y_t = \vartheta_0 + \vartheta_1 AR(1) + \varepsilon_t \qquad \text{(média)} \quad (7)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad \text{(GARCH(1,1))} \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}^2} \right| + \gamma_1 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}^2} + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \qquad \text{(EGARCH(1,1))} \quad (9)$$

Ao analisarmos as funções FAC e FPAC da rendibilidade e do quadrado da rendibilidade, conclui-se que o modelo ARCH não será o mais apropriado para estimar a volatilidade do índice PSI-20[8]. Optou-se então por estimar o GARCH(1,1) e o EGARCH(1,1). A utilização do EGARCH surge devido à anterior constatação de que poderemos estar a estudar uma série financeira onde existe *leverage effect*. Se tal acontecer, o modelo EGARCH, poderá ser vantajoso na medida em que capta melhor a assimetria da série. Para avaliar a qualidade do ajustamento foram também estimados os modelos GARCH(2,1) e EGARCH(2,1).

QUADRO 5

Modelos Estimados

Parâmetros	GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	GARCH (2,1)	EGARCH (2,1)
Média				
Constante	0.000324 (0.000)	0.00132 (0.000)	0.000268 (0.000)	0.000151 (0.000)
AR(1)	0.223742 (0.0217)	0.233501 (0.021)	0.217225 (0.023)	0.223977 (0.023)
Variância				
Constante	0.00000117 (0.000)	-0.588809 (0.055)	0.00000193 (0.000)	-0.674730 (0.066)
ε_{t-1}^2	0.199746 (0.011)		0.300552 (0.020)	
σ_{t-1}^2	0.817756 (0.009)		0.306122 (0.066)	
σ_{t-2}^2			0.415022 (0.058)	
$\left\lvert \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}^2} \right\rvert$		0.356575 (0.020)		0.452336 (0.0279)
$\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}^2}$		-0.042691 (0.011)		-0.042181 (0.014)
$\ln \sigma_{t-1}^2$		0.965973 (0.005)		0.550694 (0.052)
$\ln \sigma_{t-2}^2$				0.413878 (0.052)

Nota: Entre parêntesis apresentam-se os desvios padrão.

Ao observar os parâmetros estimados constata-se que, em qualquer dos modelos estimados, são significantes a um nível de 5%, com excepção da constante do modelo EGARCH que apenas é significante a um nível de 10%. O coeficiente $\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}^2}$ nos modelos EGARCH (1,1) e EGARCH (2,1) apresenta valores significantes

[8] Verifica-se que a FPAC não se anula para k>Q, apresentando sim coeficientes decrescentes à medida que a ordem de autocorrelação aumenta, estrutura esta típica de um GARCH. Veja-se a este propósito Nicolau (1999).

e negativos, o que vem confirmar a presença de *leverage effect* no índice PSI-20. Uma análise aos coeficientes obtidos permite constatar que a persistência obtida para os modelos GARCH (1,1) e GARCH (2,1) se aproxima de 1, o que leva a concluir que o modelo encontrado se aproxima do IGARCH.

Importa aqui analisar a presença eventual de heterocedasticidade e autocorrelação temporal nos resíduos obtidos com as estimações. A análise do teste *Durbin-Watson* permite verificar que, para todos os modelos, podemos eliminar a hipotese de presença de autocorrelação dos resíduos uma vez que o seu valor ronda 2[9]. As estatísticas Q de *Ljung-Box* aplicadas aos resíduos permitem comprovar as conclusões anteriores. Demonstra-se, assim, que os modelos estimados constituem uma aproximação razoável do processo gerador das rentabilidades do índice PSI-20.

QUADRO 6

Avaliação da qualidade dos modelos ajustados:

		GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)	GARCH (2,1)	EGARCH (2,1)
Critérios de Informação	*Akaike*	-6,634436	-6,651662	-6.639650	-6,659314
	Schwarz	-6,621318	-6,635920	-6,623909	-6,640949
Erro padrão da regressão		0,010868	0,10877	0,010869	0,010875
Máx. função de log verosimilhança		7186,777	7206,424	7193.422	7215,708
Indicador da persistência da volatilidade ($\alpha+\beta$)		1	0,966	1	0,968

No quadro 6 são apresentados vários parâmetros de avaliação da qualidade dos modelos estimados. A análise permite verificar que sobressai o modelo EGARCH (2,1) em praticamente todos os critérios com excepção do erro padrão da regressão. Este último critério apresenta, no entanto, diferenças mínimas entre os modelos estudados.

Em termos de previsão tentou avaliar-se a capacidade de previsão dos modelos um-passo-à-frente dentro da amostra. Obtiveram-se os seguintes resultados:

QUADRO 7

Capacidade de previsão dos modelos um-passo-à-frente dentro da amostra

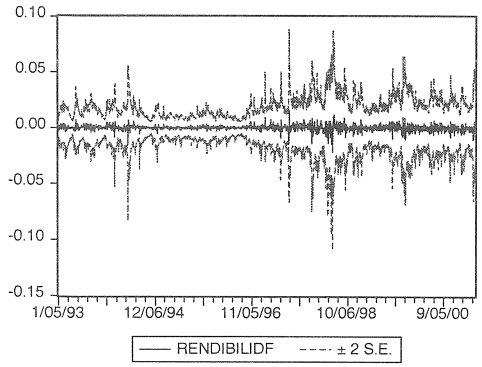
	EGARCH (1,1)	EGARCH (2,1)
Root mean squared error	0,010861	0,010857
Mean abs. percentage error	233,7156	227,7554

[9] A estatística de Durbin-Watson apresenta valores de 2,051, 2,069, 2,039 e 2,052 respectivamente para o GARCH(1,1), EGARCH(1,1), GARCH(2,1) e EGARCH(2,1).

A capacidade de previsão destes modelos é feita usualmente através da análise dos testes apresentados conjuntamente no quadro 7 e nos gráficos 4 e 5. Um bom modelo de previsão será aquele que minimizar as funções de perda, razão pela qual podemos concluir que, sendo os modelos apresentados muito similares, sobressai o modelo EGARCH (2,1) pelo seu poder de previsão. Não obstante, repare-se na diferença mínima obtida para os testes dos modelos. Assim, e em face dos resultados anteriores será de considerar que o modelo EGARCH (2,1) é o que melhor explica o comportamento da volatilidade do índice PSI-20 para o período em análise.

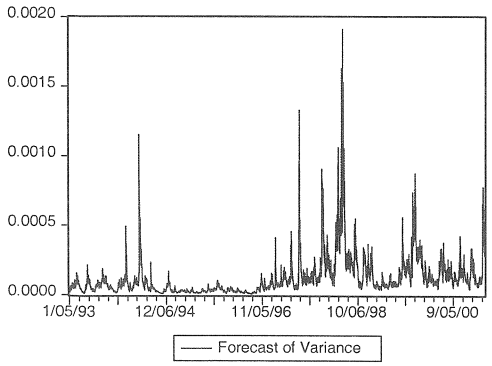
GRÁFICOS 4 e 5

Previsão um passo-à-frente dentro da amostra no modelo EGARCH (2,1)



Forecast: RENDIBILIDF
Actual: RENDIBILIDADE
Forecast sample: 1/04/1993 4/2
Adjusted sample: 1/05/1993 4/2
Included observations: 2165

Root Mean Squared Error	0.010857
Mean Abs. Percent Error	0.007313
Mean Absolute Percentage Error	227.7554
Theil Inequality Coefficient	0.801505
Bias Proportion	0.000375
Variance Proportion	0.624043



4. CONCLUSÃO

A análise da volatilidade através dos modelos ARCH é uma metodologia da determinação da volatilidade baseada em hipóteses alternativas às do modelo de Black-Scholes Com o presente estudo pode concluir-se que a volatilidade da série

do PSI-20 não é constante, pelo que a avaliação de opções sobre este índice com a utilização do modelo de Black-Scholes dificilmente poderá conduzir a bons resultados. Constata-se igualmente, através deste estudo, que os modelos ARCH representam uma boa alternativa para a estimação da volatilidade do índice financeiro português. Este resultado está em consonância com os obtidos em aplicações similares a mercados financeiros congéneres. De entre os diferentes modelos analisados sobressaiu o modelo EGARCH(2,1), pelo que se pode igualmente concluir que, para o período em estudo, existe *leverage effect*, isto é, uma assimetria na volatilidade que consiste em esta ser maior nas descidas do que nas subidas do valor daquele índice.

Referências bibliográficas:

- Abken, P.; Nandi, S. (1992) Options and volatility, *Economic Review*, *Federal Bank of Atlanta*, p. 21-35.
- Bollerslev, Tim (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, nº31, p. 307-327.
- Bollerslev, Tim (1990) Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, nº 72, p. 498-505.
- Bollerslev, Tim; Engle, Robert; Woodridge, Jeffrey (1988) A capital asset pricing model with time varying covariance's, *Journal of political economy*, Vol.96, nº1, p. 116-131.
- Engle, Robert (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom Inflation, *Econometrica*, nº50, p. 987-1007.
- Engle, Robert, Mustafa, Chowdhury (1992) Implied ARCH models from option prices, *Journal of econometric*, nº52, p. 289-311.
- Engle, Robert; Lilien, David; Robins, Russel (1987) Estimating time varying risk premia in term structure: the ARCH-M model, *Econometrica*, Vol.55, nº2, p. 391-407.
- Engle, Robert; Ng, Victor K. (1993) Measuring and testing the impact of news on volatility, *The Journal of finance*, Vol.XLVIII, nº5, p. 1749-1768.
- Herencia, M. Z.; Hotta, L.K.; Vallspereira, P.L.; Ferreira, J.; Mecchi, M. (1995) Volatilidade nos retornos de Telebrás: uma comparação entre a abordagem ARCH e o modelo de volatilidade estocástica, *Anais do XVII encontro brasileiro de econometria*, p. 587-621.
- Nelson, Daniel (1990) Stationarity and persistence in the GARCH (1,1) model, *Cambridge University press*.
- Nicolau, João Carlos (1999) Modelos ARCH, *Série Moderna Finança*, *Instituto Mercado de Capitais*.
- Noh, Jaesun; Engle, Robert; Kane, Alex (1994) Forecasting volatility and option prices of the S&P 500 index, *Journal of Derivatives*, p. 17-30.
- Radcliffe, Robert (1997) Investment, fifth edition - Addison Wesley
- Sobrinho, Nelson (2000) Extracção da volatilidade do IBOVESPA, *Resenha BM&F nº144*, p. 17-39.